PITAGORAS ACADEMIA

AMANECIDA DE MATEMÁTICA

SOLUCIONARIO DE ÁLGEBRA

01.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$g(x) = mx^2 + nx + p$, $a \neq 0$ $m \neq 0$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$g(x) = m\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 + \left(p - \frac{n^2}{4m}\right)$$

Como los vértices de las parábolas se encuentra ubicado en el eje positivo X y además coinciden, entonces

$$k = c - \frac{b^2}{4a} = 0 \wedge k = p - \frac{n^2}{4m} = 0$$

$\Rightarrow b^2 = 4ac \wedge n^2 = 4mp$ (I) es V

También

$$\frac{b}{2a} = \frac{n}{2m} \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$$ (II) es V

Según la gráfica se tiene $m < a$

haciendo $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{n}{2m}$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow h^3 = \left(-\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$h^2 = \frac{n^2}{4m^2} = \frac{4mp}{4m^2}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{p}{m} \Rightarrow h^3 = \left(-\frac{n}{2m}\right)\left(\frac{p}{m}\right)$$

Entonces:

$$\frac{np}{m^2} = \frac{bc}{a^2} \Rightarrow a^2np = bcm^2$$

$\Leftrightarrow abc = mnp$ si $m = a$

$\Rightarrow$ (III) (F)

Luego solo (I) $\wedge$ (II) es correcto

RESPUESTA: D

02.

$1 - x \geq 0 \wedge 1 + x \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 1 \wedge x \geq -1$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\Downarrow$

$|x| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{|x|} \leq 1$

Luego:

$x \in [-1,0]$: $-1 \leq x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x + 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} \leq 1$

$0 \leq -x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 - x \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq 1 + \sqrt{2}$

Como:

$\sqrt{|x|} \leq 1 \leq \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

$x \in [0,1]$: $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq x + 1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}$

$-1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq 1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{|x|} \leq 1 \leq \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

entonces

c.s. $= [-1,0] \cup [0,1] = [-1,1]$

RESPUESTA: E

03.

$16(z^2 - 2iz - 1)^2 = z^4$

$= [2(z-i)]^4$

$\Rightarrow \left(\frac{2(z-i)}{z}\right)^4 = 1$

$\Rightarrow \frac{2(z-i)}{z} = \cos\left(\frac{2k}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k}{4}\pi\right);$

$k = 0, 1, 2, 3$

$k = 0: \frac{2(z-i)}{z} = 1 \Rightarrow z = 2i$

$k = 1: \frac{2(z-i)}{z} = i \Rightarrow z = \frac{-2+4i}{5}$

$k = 2: \frac{2(z-i)}{z} = -1 \Rightarrow z = \frac{2i}{3}$

$k = 3: \frac{2(z-i)}{z} = -i \Rightarrow z = \frac{2+4i}{5}$

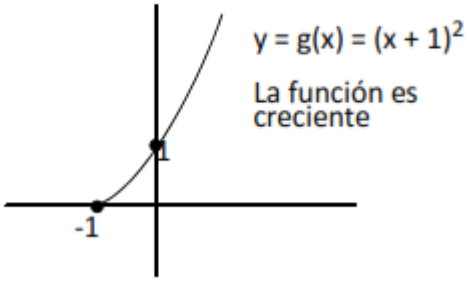
Luego la suma de las raíces

$2i + \frac{-2+4i}{5} + \frac{2i}{3} + \frac{2+4i}{5} = \frac{64i}{15}$

RESPUESTA: E

04.

La función g es inyectiva



La función h no es inyectiva

$h(x) = x^2(x+1)$, $Dom(h) = [-1, \infty\rangle$

$h(-1) = 0$ y $h(0) = 0$

Para $x = -1$ y $x = 0$ son dos valores diferentes del dominio la imagen es la misma, entonces no es inyectiva.

$\ell(x) = (x+1)^2 + x^2$

$\ell(-1) = 1$ y $\ell(0) = 1$

Para $x = -1$ y $x = 0$ son dos valores diferentes del dominio se tiene la misma imagen, entonces no es inyectiva.

RESPUESTA: C

05.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 1 \Rightarrow a+b = ab$

$\frac{1}{\log_a(ab)} + \frac{1}{\log_b(ab)} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b} + \frac{1}{\log_b b + \log_b a}$

$= \frac{1}{1+\log_a} + \frac{1}{1+\log_b a}$

$= \sqrt{x} - 1$

Sabemos que: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

definamos: $t = \log_a b$

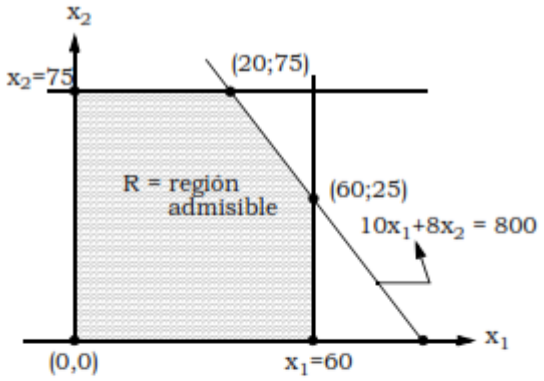
$\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{1+t+1+\frac{1}{t}}{(1+t)(1+\frac{1}{t})} = \frac{t^2+2t+1}{(t+1)^2} =$

$1 = \sqrt{x} - 1$

Entonces: $\frac{x}{2} = 2$

RESPUESTA: D

06.



(I) (F) existe región admisible, es decir, $R \neq \phi$

Puntos extremos (0; 75), (20; 75), (60; 25), (60; 0), (0; 0)

En

(0,0) : z = 0

(60;0) : z = 30(60) = 1800

(60;25) : z = 30(60)+20(25) = 2300

(20;75) : z = 30(20)+20(75) = 2100

(0;75) : z = 20(75) = 1500

Luego:

(II) (F) el óptimo se dá en (60;25)

(II) (V) $(0;75) \in R$

Son correctas sólo III

RESPUESTA: C

07.

$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = \frac{1}{2}, \ldots,$

$S_{2k-1} = \frac{1}{k}, S_{2k} = 0$

$\Rightarrow S_{2k-1} = \frac{1}{k} \Rightarrow S_{2k-1} \to 0$

$S_{2k} = 0 \Rightarrow S_{2k} \to 0$

$\Rightarrow S_k \to 0$ converge

$P_0 = 1, P_1 = 7, P_2 = 0, P_3 = \frac{1}{2},$

$\ldots, P_{2k-1} = \frac{1}{k}, P_{2k} = 1$

$\Rightarrow P_{2k-1} \to 0$

$P_{2k} \to 1$

$\Rightarrow P_k$ no converge (no existe)

RESPUESTA: E

08.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 1 & a \\ 3 & a & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b & a & -1 \\ a & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Por dato AB = I y BA = I

El elemento 1,2 de AB: debe ser igual al elemento 1,2 de I el cual es 0.

(Fila 1 de A) . (Columna 2 de B)

$$= [1 \quad a \quad 3]\begin{bmatrix} a \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = [0]$$

$1 \cdot a + a \cdot 5 + 3(-4) = 0$

$6a - 12 = 0$

$a = 2$

El elemento 1,1 de AB debe ser igual al elemento 1,1 de I el cual es 1.

(Fila 1 de A) · (Columna 1 de B)

$$= [1 \quad a \quad 3]\begin{bmatrix} b \\ a \\ -1 \end{bmatrix} = [1]$$

$1 \cdot b + a \cdot a + 3(-1) = 1$

$b + 2 \cdot 2 + (-3) = 1$

$\Rightarrow b + 4 - 3 = 1$

$b = 0$

Se pide

$a^2 - b^2 - 4 = 2^2 - 0^2 - 4 = 0.$

RESPUESTA: C

09.

$4x + y = 9k$ ... (1)

$-x + 6y = 4k$ ... (2)

$k \in \mathbb{R}$

De (1) y (2) se despeja k para hallar la relación entre x é y

$$k = \frac{4x + y}{9} = \frac{-x + 6y}{4}$$

$\Rightarrow 4(4x + y) = 9(-x + 6y)$

$\Rightarrow 25x = 50y$

$\Rightarrow x = 2y$

$\Rightarrow x - 2y = 0.$

RESPUESTA: D

10.

$$|x^2 - 1| - x = x \Rightarrow |x^2 - 1| = 2x$$

$$x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

De (1):

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

De (2)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

De (3): $x = \pm 1$

Las raíces son:

$1 \pm \sqrt{2}, \ -1 \pm \sqrt{2}, \pm 1$

Se pide la suma de las raíces positivas

$(1 + \sqrt{2}) + (-1 + \sqrt{2}) + (1)$

$= 2\sqrt{2} + 1.$

RESPUESTA: E